Differenzierender Auftrag

Von Christoph Hammer

Einstieg:

Es sind die Zahlen 1, 2 und 3 gegeben. Bilde damit alle möglichen Brüche aus jeweils zwei dieser Zahlen und sortiere sie der Größe nach. (Mehrfachverwendung erlaubt!)

Im Unterricht sollte zunächst sicher gestellt werden, dass alle Lernenden die Aufgabenstellung genau verstanden haben und wissen, um welche Objekte es geht. Hier heißt das, es sind Brüche mit einstelligem Zähler und einstelligem Nenner aus den gegebenen Zahlen zu bilden, wobei diese auch mehrfach verwendet werden dürfen.

Verwendet man zur Lösung eine tabellarische Darstellung, so wird schnell klar, dass die Anzahl der Möglichkeiten das Quadrat der Anzahl der verfügbaren Zahlen ist.

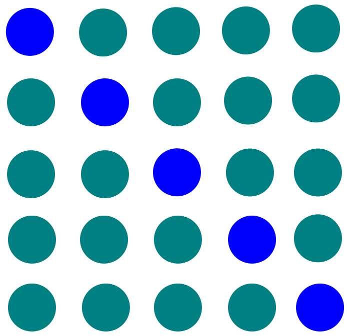
	1	2	3
1	$\frac{1}{1}$	$\frac{2}{1}$	$\frac{3}{1}$
2	$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{2}$	$\frac{3}{2}$
3	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{3}{3}$

Kern der Sache:

Wie viele Möglichkeiten gibt es, wenn du die Zahlen 1, 2, 3, 5, 7 verwendest?
Wie viele dieser Brüche sind kleiner als 1?

	1	2	3	5	7
1	$\frac{1}{1}$	$\frac{2}{1}$	$\frac{3}{1}$	$\frac{5}{1}$	$\frac{7}{1}$
2	$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{2}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{5}{2}$	$\frac{7}{2}$
3	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{3}{3}$	$\frac{5}{3}$	$\frac{7}{3}$
5	$\frac{1}{5}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{5}{5}$	$\frac{7}{5}$
7	$\frac{1}{7}$	$\frac{2}{7}$	$\frac{3}{7}$	$\frac{5}{7}$	$\frac{7}{7}$

Die Frage nach der Anzahl möglicher Brüche kleiner 1 kann dann direkt oder – gelöst von konkreten Zahlen – durch Veranschaulichung mit Plättchen leicht beantwortet werden:

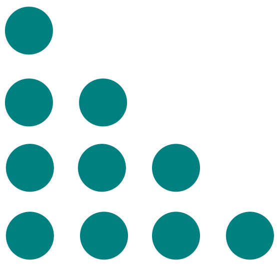


$$\frac{n^2 - n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$$

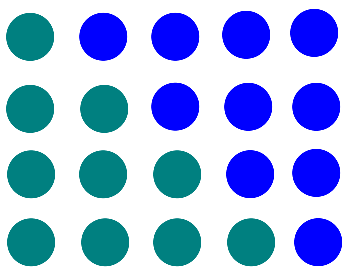
Dieses Ergebnis beinhaltet auch die Lösung des berühmten Problems des kleinen Gauß, bei dem die Summe der natürlichen Zahlen kleiner oder gleich n – 1 (in der hier verwendeten Zählweise) zu berechnen ist.

Die Begründung der Formel liegt auf der Hand:
Es sind insgesamt n^2 Plättchen von denen die n in der Diagonale subtrahiert werden müssen. Die gesuchte Summe 1 + 2 + … + n - 1 ergibt sich als die Hälfte dieser Differenz.

Eine andere Möglichkeit, die Formel von Gauß (in der üblichen Zählweise) zu beweisen, geht ebenfalls von der Darstellung der gesuchten Summe als Punktmuster aus:



Durch Verdopplung und geeignete Gruppierung wird die Summenformel offensichtlich:



$$\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n \cdot (n+1)}{2}$$

Rampe:
Wie viele Möglichkeiten gibt es, wenn du die Zahlen 1, 2, 3, 4, 5, 6, ..., n verwendest? Sind die Brüche alle verschieden? Forsche weiter!

Diese Frage führt im einfachsten Fall zu einer Fleißarbeit, die für kleine n allen Schülern möglich ist. Eine allgemeine Lösung geht über das Schulniveau hinaus und erfordert Kenntnisse aus der Zahlentheorie.

Die Fleißarbeit soll für n = 10 vorgeführt werden. Zunächst hilft wieder eine Tabelle, den Überblick zu bewahren:

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	$\frac{1}{1}$	$\frac{2}{1}$	$\frac{3}{1}$	$\frac{4}{1}$	$\frac{5}{1}$	$\frac{6}{1}$	$\frac{7}{1}$	$\frac{8}{1}$	$\frac{9}{1}$	$\frac{10}{1}$
2	$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{2}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{4}{2}$	$\frac{5}{2}$	$\frac{6}{2}$	$\frac{7}{2}$	$\frac{8}{2}$	$\frac{9}{2}$	$\frac{10}{2}$
3	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{3}{3}$	$\frac{4}{3}$	$\frac{5}{3}$	$\frac{6}{3}$	$\frac{7}{3}$	$\frac{8}{3}$	$\frac{9}{3}$	$\frac{10}{3}$
4	$\frac{1}{4}$	$\frac{2}{4}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{4}{4}$	$\frac{5}{4}$	$\frac{6}{4}$	$\frac{7}{4}$	$\frac{8}{4}$	$\frac{9}{4}$	$\frac{10}{4}$
5	$\frac{1}{5}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{4}{5}$	$\frac{5}{5}$	$\frac{6}{5}$	$\frac{7}{5}$	$\frac{8}{5}$	$\frac{9}{5}$	$\frac{10}{5}$
6	$\frac{1}{6}$	$\frac{2}{6}$	$\frac{3}{6}$	$\frac{4}{6}$	$\frac{5}{6}$	$\frac{6}{6}$	$\frac{7}{6}$	$\frac{8}{6}$	$\frac{9}{6}$	$\frac{10}{6}$
7	$\frac{1}{7}$	$\frac{2}{7}$	$\frac{3}{7}$	$\frac{4}{7}$	$\frac{5}{7}$	$\frac{6}{7}$	$\frac{7}{7}$	$\frac{8}{7}$	$\frac{9}{7}$	$\frac{10}{7}$
8	$\frac{1}{8}$	$\frac{2}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{4}{8}$	$\frac{5}{8}$	$\frac{6}{8}$	$\frac{7}{8}$	$\frac{8}{8}$	$\frac{9}{8}$	$\frac{10}{8}$
9	$\frac{1}{9}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{3}{9}$	$\frac{4}{9}$	$\frac{5}{9}$	$\frac{6}{9}$	$\frac{7}{9}$	$\frac{8}{9}$	$\frac{9}{9}$	$\frac{10}{9}$
10	$\frac{1}{10}$	$\frac{2}{10}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{4}{10}$	$\frac{5}{10}$	$\frac{6}{10}$	$\frac{7}{10}$	$\frac{8}{10}$	$\frac{9}{10}$	$\frac{10}{10}$

Offensichtlich sind die aufgeführten Brüche nicht alle verschieden, da bei einigen gekürzt werden kann. Diese liegen symmetrisch zur Diagonalen mit den Brüchen, die den Wert 1 haben. In folgender Tabelle sind die Brüche farbig markiert, die gekürzt werden können. Die Anzahl der verschiedenen Brüche lässt sich abzählen:

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	$\frac{1}{1}$	$\frac{2}{1}$	$\frac{3}{1}$	$\frac{4}{1}$	$\frac{5}{1}$	$\frac{6}{1}$	$\frac{7}{1}$	$\frac{8}{1}$	$\frac{9}{1}$	$\frac{10}{1}$
2	$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{2}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{4}{2}$	$\frac{5}{2}$	$\frac{6}{2}$	$\frac{7}{2}$	$\frac{8}{2}$	$\frac{9}{2}$	$\frac{10}{2}$
3	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{3}{3}$	$\frac{4}{3}$	$\frac{5}{3}$	$\frac{6}{3}$	$\frac{7}{3}$	$\frac{8}{3}$	$\frac{9}{3}$	$\frac{10}{3}$
4	$\frac{1}{4}$	$\frac{2}{4}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{4}{4}$	$\frac{5}{4}$	$\frac{6}{4}$	$\frac{7}{4}$	$\frac{8}{4}$	$\frac{9}{4}$	$\frac{10}{4}$
5	$\frac{1}{5}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{4}{5}$	$\frac{5}{5}$	$\frac{6}{5}$	$\frac{7}{5}$	$\frac{8}{5}$	$\frac{9}{5}$	$\frac{10}{5}$
6	$\frac{1}{6}$	$\frac{2}{6}$	$\frac{3}{6}$	$\frac{4}{6}$	$\frac{5}{6}$	$\frac{6}{6}$	$\frac{7}{6}$	$\frac{8}{6}$	$\frac{9}{6}$	$\frac{10}{6}$
7	$\frac{1}{7}$	$\frac{2}{7}$	$\frac{3}{7}$	$\frac{4}{7}$	$\frac{5}{7}$	$\frac{6}{7}$	$\frac{7}{7}$	$\frac{8}{7}$	$\frac{9}{7}$	$\frac{10}{7}$
8	$\frac{1}{8}$	$\frac{2}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{4}{8}$	$\frac{5}{8}$	$\frac{6}{8}$	$\frac{7}{8}$	$\frac{8}{8}$	$\frac{9}{8}$	$\frac{10}{8}$
9	$\frac{1}{9}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{3}{9}$	$\frac{4}{9}$	$\frac{5}{9}$	$\frac{6}{9}$	$\frac{7}{9}$	$\frac{8}{9}$	$\frac{9}{9}$	$\frac{10}{9}$
10	$\frac{1}{10}$	$\frac{2}{10}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{4}{10}$	$\frac{5}{10}$	$\frac{6}{10}$	$\frac{7}{10}$	$\frac{8}{10}$	$\frac{9}{10}$	$\frac{10}{10}$

Nun stellt sich die Frage, ob es eine allgemeine Lösung gibt.
Dabei müssen wir den Bereich der Schulmathematik verlassen.

Die Lösung wird erkennbar, wenn man n schrittweise vergrößert. Das Vorgehen kann anschaulich an obiger Tabelle verfolgt werden, indem man, ausgehend von links oben, größer werdende Quadrate betrachtet und die hinzukommenden Brüche zählt. Die gesuchte Anzahl verschiedener Brüche bezeichnen wir mit Z(n):

$$Z(1) = 1$$

Im nächsten Schritt kommen zwei Brüche hinzu, nämlich $\frac{2}{1}$ und $\frac{1}{2}$:

$$Z(2) = Z(1) + 2 \cdot 1 = 3$$

Dann sind je zwei Brüche mit Zähler 3 oder mit Nenner 3 zu addieren:

$$Z(3) = Z(2) + 2 \cdot 2 = 7$$

Beim nächsten Schritt tritt zum ersten Mal der Fall auf, dass gekürzt werden kann. Es kommen nur die $2 \cdot 2$ Brüche mit zu 4 teilerfremden Zählern bzw. Nennern < 4 hinzu:

$$Z(4) = Z(3) + 2 \cdot 2 = 11$$

Die weiteren Schritte sind damit klar:

$$
\begin{aligned}
Z(5) &= Z(4) + 2 \cdot 4 = 19\\
Z(6) &= Z(5) + 2 \cdot 2 = 23\\
Z(7) &= Z(6) + 2 \cdot 6 = 35\\
Z(8) &= Z(7) + 2 \cdot 4 = 43\\
Z(9) &= Z(8) + 2 \cdot 6 = 55\\
Z(10) &= Z(9) + 2 \cdot 4 = 63
\end{aligned}
$$

Allgemein: $Z(n+1) = Z(n) + 2 \cdot \varphi(n+1)$,

wenn φ diejenige Funktion ist, die einer natürlichen Zahl n die zu n teilerfremden natürlichen Zahlen < n zuordnet.
Diese Funktion heißt **Euler´sche Phi-Funktion** und hat interessante Eigenschaften.

Zum Beispiel kann aus

(1) $\varphi(n \cdot m) = \varphi(n) \cdot \varphi(m)$ für teilerfremde $n, m \in \mathbb{N}$

und der trivialen Beziehung

(2) $\varphi(p) = p - 1$ für Primzahlen p

eine Regel zur Berechnung von φ(n) aus der Primfaktorzerlegung von n abgeleitet werden:

Zunächst gilt:

(3) $\varphi(p^k) = p^k - p^{k-1}$,

weil p^k nur die Teiler $p, 2 \cdot p, 3 \cdot p, \ldots, p^{k-1} \cdot p$ hat.
Das sind p^{k-1} nicht teilerfremde Zahlen < p^k.

Ist $n = \prod_{p|n} p^{k_p}$ die Primfaktorzerlegung von n, dann ergibt sich:

(4) $\varphi(n) = \prod_{p|n} p^{k_p - 1}(p-1) = n \cdot \prod_{p|n}\left(1 - \frac{1}{p}\right)$.

Beispiel:

$$\varphi(108) = \varphi(2^2 \cdot 3^3) = 108 \cdot \left(1 - \frac{1}{2}\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{3}\right) = \frac{108 \cdot 1 \cdot 2}{2 \cdot 3} = 36$$

Für unser Beispiel n = 10 ist die Formel (4) unnötig.
Alle Werte sind mit (1), (2) und (3) zu finden.

Nun zurück zur oben gestellten Frage[1], wie viele verschiedene Brüche es für beliebiges n gibt. Es genügt, die Werte der Phi-Funktion zu addieren, diese Summe zu verdoppeln und den Sonderfall 1 zu berücksichtigen:

$$Z(n) = 1 + 2 \cdot \sum_{i=2}^{n} \varphi(i)$$

In folgender Tabelle sind die Ergebnisse bis n = 10 zusammengestellt:

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
φ(n)	0	1	2	2	4	2	6	4	6	4
Z(n)	1	3	7	11	19	23	35	43	55	63

[1] Für einen wertvollen Hinweis danke ich Dr. Renate Motzer.